数理解析研究所講究録
第1821巻 2013年 20-25

上半連続コンパクト値関数の分解

(Factorizations of upper semicontinuous compact-valued mappings)

Valentin Gutev
School of Mathematical Sciences,
University of KwaZulu-Natal, South Africa

島根大学 総合理工学部 山内貴光 (Takamitsu Yamauchi)
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering,
Shimane University, Japan

以下, 空間は T_2 分離公理をみたす位相空間とし, 空間 X の位相濃度 (weight) を $w(X)$ で表す. 空間 X から空間 Y への連続写像 $f : X \to Y$ に対して, 空間 Z と連続写像 $g : X \to Z$, $h : Z \to Y$ が $f = h \circ g$ を満たすとき, それらの組 (Z, g, h) を f の**分解** (factorization) という.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

空間 Z が良い性質をみたすように $f : X \to Y$ の分解 (Z, g, h) が与えられれば, X 上の連続写像 f の議論を, よりよい空間 Z 上の連続写像 h の議論へ帰着できる場合がある. Mardešić [8, Theorem 1] は, コンパクト空間 X からコンパクト空間 Y への連続写像 $f : X \to Y$ に対して, Z がコンパクト空間で $\dim Z \leq \dim X$ かつ $w(Z) \leq w(Y)$ となる f の分解 (Z, g, h) が存在することを証明した (ただし, $\dim X$ は X の被覆次元を表す). ここで Y が距離化可能であれば, Z も距離化可能空間としてとることができる ([8, Lemma 4]). Mardešić の定理を発端とし, 写像の分解定理は広く研究され, 特に位相次元論に応用された (cf. [12]). 本稿では, 集合値関数の分解について解説し, 上半連続コンパクト値関数の分解について得られた結果を報告する. 本稿で用いる用語の定義については, [3] を参照されたい.

空間 Y の空でない部分集合全体を 2^Y で表す. 集合値関数 $\Psi : X \to 2^Y$ が**上半連続** (upper semicontinuous) であるとは, 任意の Y の閉集合 F に対して, 集合

$$\Psi^{-1}[F] = \{x \in X : \Phi(x) \cap F \neq \varnothing\}$$

が X の閉集合であることをいう. 集合値関数 $\Phi : X \to 2^Y$ が**下半連続** (lower semicontinuous) であるとは, 任意の Y の開集合 U に対して, $\Phi^{-1}[U]$ が X の開集

合であることをいう．空間 Y に対して,

$$\mathscr{F}(Y)=\{F\in 2^Y : F \text{ は } Y \text{ の閉集合}\}$$
$$\mathscr{C}(Y)=\{C\in 2^Y : C \text{ はコンパクト}\}$$

とおく．空間 X から距離化可能空間 Y への下半連続な集合値関数 $\Phi : X \to \mathscr{F}(Y)$ に対して, 空間 Z, 写像 $g : X \to Z$ および集合値関数 $\varphi : Z \to \mathscr{F}(Y)$ が次の条件をみたすとき, 組 (Z, g, φ) を Φ の下半連続な**弱分解** (weak factorization) という:

- Z は距離化可能で $w(Z) \le w(Y)$, g は連続, かつ φ は下半連続.
- 各 $x \in X$ に対して $\varphi(g(x)) \subset \Phi(x)$.

Michael の選択定理 [9] に示唆され, Choban and Nedev [2] は, 次の下半連続集合値関数の弱分解定理を証明した (cf. [11]).

定理 1 (Choban and Nedev [2]). X を空間, Y を完備距離化可能空間, $\Phi : X \to \mathscr{F}(Y)$ を下半連続な集合値関数とする．さらに, X, Φ が次の何れかの条件をみたすとする:

(a) X はパラコンパクト[1],

(b) X は族正規[2]かつ任意の $x \in X$ に対して $\Phi(x) \in \mathscr{C}(Y) \cup \{Y\}$.

このとき, Φ の下半連続な弱分解 (Z, g, φ) が存在する.

空間 X から距離化可能空間 Y への上半連続 (下半連続) な集合値関数 $\Psi : X \to \mathscr{F}(Y)$ に対して, 空間 Z, 写像 $g : X \to Z$ および集合値関数 $\psi : Z \to \mathscr{F}(Y)$ が次の条件をみたすとき, 組 (Z, g, ψ) を Ψ の上半連続 (下半連続) な**分解** (factorization) という:

- Z は距離化可能で $w(Z) \le w(Y)$, g は連続, かつ ψ は上半連続 (下半連続).
- 各 $x \in X$ に対して $\psi(g(x)) = \Psi(x)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathscr{F}(Y) \\ & Z \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

集合値関数 $\Psi : X \to 2^Y$ が**強上半連続** (strongly upper semicontinuous) であるとは, 任意の Y のゼロ集合[3] A に対して, $\Psi^{-1}[A]$ が X のゼロ集合であることをい

---

[1]空間 X の任意の開被覆が局所有限な開被覆によって細分されるとき, X を**パラコンパクト**空間という

[2]空間 X の任意の疎 (discrete) な閉集合族 $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ に対して, 素 (disjoint) な開集合族 $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ が存在し, 各 $\alpha \in A$ に対して $F_\alpha \subset U_\alpha$ が成り立つとき, X を**族正規** (collectionwise normal) 空間という.

[3]空間 X の部分集合 A が**ゼロ集合** (zero set, functionally closed set) であるとは, 実数値連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が存在して, $A = \{x \in X : f(x) = 0\}$ が成り立つことをいう.

う．集合値関数 $\Phi : X \to 2^Y$ が**強下半連続** (strongly lower semicontinuous) であるとは，任意の Y のコゼロ集合[4] A に対して，$\Phi^{-1}[A]$ が X のコゼロ集合であることをいう．距離化可能空間の任意の閉集合 (開集合) はゼロ集合 (コゼロ集合) であり，ゼロ集合 (コゼロ集合) の連続写像による逆像はゼロ集合 (コゼロ集合) である．このことから，集合値関数 $\Psi : X \to \mathscr{F}(Y)$ が上半連続 (下半連続) な分解をもてば，Ψ は強上半連続 (強下半連続) である．逆に，Gutev [4] は次の分解定理を与えた．

定理 2 (Gutev [4])**.** (1) 空間 X から可分距離化可能空間 Y への強下半連続な集合値関数 $\Phi : X \to \mathscr{F}(Y)$ は，下半連続な分解 (Z, g, φ) をもつ．
(2) 空間 X から可分距離化可能空間 Y への強上半連続な集合値関数 $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ は，上半連続な分解 (Z, g, ψ) をもつ．

定理 2 では 終集合 Y に可分性が仮定されている．そこで，Y の可分性を仮定せずとも，Φ (Ψ) は下半連続な (上半連続な) 分解をもつか，という問題が考えられる．この問の上半連続な分解に関して，次の結果を得た．

定理 3. 可算パラコンパクト[5]な族正規空間 X から距離化可能空間 Y への強上半連続な集合値関数 $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ は，上半連続な分解 (Z, g, ψ) をもつ．

空間 X の任意の閉集合が G_δ 集合[6]であるとき，X は**完全** (perfect) であるという．完全な正規空間は，可算パラコンパクトである．また，完全な正規空間上の任意の閉集合はゼロ集合になることから，完全な正規空間上の任意の上半連続な集合値関数は強上半連続である．定理 3 の系として，次の完全な族正規空間の特徴付けを得る．

系 4. 空間 X が完全かつ族正規であることの必要十分条件は，任意の距離化可能空間 Y に対して，任意の上半連続な集合値関数 $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ が上半連続な分解 (Z, g, ψ) をもつことである．

注意 5. Bing [1] は完全な正規空間で族正規でない空間を構成した．系 4 より，この空間上の上半連続関数で，上半連続な分解をもたないものが存在する．完全な正規空間上の上半連続な集合値関数は，強上半連続である．よって，定理 3 において，X が族正規であるという仮定は落とせない．

---

[4]空間 X の部分集合 A が**コゼロ集合** (cozero set, functionally open set) であるとは，実数値連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が存在して，$A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ が成り立つことをいう．

[5]空間 X が**可算パラコンパクト** (countably paracompact) であるとは，X 任意の可算な開被覆が局所有限な X の開被覆によって細分されることである．

[6]空間 X の部分集合 A が可算個の開集合の共通部分として表されるとき，A を X の G_δ **集合**という．

空間 X から距離化可能空間 Y への上半連続な集合値関数 $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ が上半連続な分解 (Z, g, ψ) をもてば，そのグラフ

$$\mathsf{Graph}(\Psi) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \Psi(x)\}$$

は $X \times Y$ のゼロ集合である[7]. X が可算パラコンパクトな族正規空間で Y が完備距離化可能空間であれば，その逆，すなわち次が成り立つ.

定理 6. 可算パラコンパクトな族正規空間 X から完備距離化可能空間 Y への上半連続な集合値関数 $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ のグラフ $\mathsf{Graph}(\Psi)$ が $X \times Y$ のゼロ集合ならば，Ψ は上半連続な分解 (Z, g, ψ) をもつ.

空間 X の部分集合 F がゼロ集合であれば，F は閉かつ G_δ 集合であり，X が正規空間であれば，その逆も成り立つ. X がパラコンパクト空間で Y が完備距離化可能空間であっても $X \times Y$ が正規になるとは限らないが ([10])，次は成り立つ.

命題 7. パラコンパクト空間 X から完備距離化可能空間 Y への上半連続な集合値関数 $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ のグラフ $\mathsf{Graph}(\Psi)$ が $X \times Y$ の G_δ 集合ならば，$\mathsf{Graph}(\Psi)$ は $X \times Y$ のゼロ集合である.

よって，

系 8. パラコンパクト空間 X から完備距離化可能空間 Y への上半連続な集合値関数 $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ のグラフ $\mathsf{Graph}(\Psi)$ が $X \times Y$ の G_δ 集合ならば，Ψ は上半連続な分解 (Z, g, ψ) をもつ.

終集合 Y の完備性を仮定しなくても定理 6 や系 8 が成り立つかどうかは，分かっていない.

集合値関数に強い条件を課せば，定義域が一般の空間でも上半連続な分解が存在することが知られている. 上半連続かつ下半連続な集合値関数を**連続**な集合値関数という. 集合値関数 $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ が**上半 δ-連続** (upper δ-continuous) であるとは，連続な集合値関数 $\Phi_n : X \to \mathscr{C}(Y)$ の列 $\{\Phi_n\}$ が存在し，各 $x \in X$ に対して $\Psi(x) = \bigcap\{\Phi_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ が成り立つことをいう ([5]). コンパクト値上半連続関数の共通集合として得られる集合値関数は上半連続であることから ([3, 3.12.28])，上半 δ-連続な集合値関数は上半連続である. Gutev, Ohta and Yamazaki [5, Lemma 4.7] は次の定理を証明した.

定理 9 (Gutev, Ohta and Yamazaki [5])**.** 空間 X から距離空間 Y への上半 δ-連続な集合値関数 $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ は上半連続な分解 (Z, g, ψ) をもつ.

---

[7] 実際，$\mathsf{Graph}(\psi)$ は距離化可能空間 $Z \times Y$ の閉集合よりゼロ集合，すなわち，$\mathsf{Graph}(\psi) = \{t \in Z \times Y : f(t) \neq 0\}$ をみたす連続関数 $f : Z \times Y \to \mathbb{R}$ が存在する. このとき，$h : X \times Y \to \mathbb{R}$ を $(x, y) \in X \times Y$ に対して $h(x, y) = f(g(x), y)$ で定めれば，h は連続で，$\mathsf{Graph}(\Psi) = \{s \in X \times Y : h(s) \neq 0\}$.

一般の空間 X から距離空間 Y への集合値関数 $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ が上半連続な分解をもつための必要十分条件として, 次を得た.

定理 10. 空間 X から距離空間 Y のコンパクト値関数 $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ に対して, 次は同値:

(a) Y が Banach 空間 E へ埋め込まれたとき, $\Psi : X \to \mathscr{C}(E)$ は上半 δ-連続である.

(b) $\Psi : X \to \mathscr{C}(E)$ が上半 δ-連続となるような Y を含む距離空間 E が存在する.

(c) Ψ は上半連続な分解 (Z, g, ψ) をもつ.

注意 11. コンパクト値関数 $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ が上半 δ-連続で $Y \subset E$ であるとき, $\Psi : X \to \mathscr{C}(E)$ とみなしても, Ψ は上半 δ-連続である. 従って, 定理 10 の (a)–(c) は, 条件

(d) $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ は上半 δ-連続である

より弱い条件である. Gutev, Ohta and Yamazaki [5, Example 2.12] は, $\Psi(x) \subset \Phi(x)$, $x \in X$ をみたす連続なコンパクト値写像 $\Phi : \mathbb{R} \to \mathscr{C}(\mathbb{N})$ が存在しない上半連続なコンパクト値写像 $\Psi : \mathbb{R} \to \mathscr{C}(\mathbb{N})$ を構成した. この Ψ は上半連続な分解 $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \Psi)$ をもつが, 上半 δ-連続でない. 従って, 定理 10 の (a)–(c) は (d) より真に弱い条件である. しかし, Y が Banach 空間で $\Phi : X \to \mathscr{C}(Y)$ が凸値関数であれば, 定理 10 の (a)–(c) と (d) が同値になることが, Gutev, Ohta and Yamazaki [5, Lemma 4.7] によって証明されている.

最後に, 上半連続な分解の応用について述べる. 集合値関数 $\Phi : X \to 2^Y$ に対して, 写像 $f : X \to Y$ が Φ の**選択関数**であるとは, 任意の $x \in X$ に対して $f(x) \in \Phi(x)$ が成り立つことをいう. 下半連続な集合値関数については, Michael の選択定理 ([9]) を初めとした連続な選択関数の存在定理があるが, 上半連続な集合値関数については, 単純な場合であっても連続な選択関数の存在は保証されない[8]. しかし, 良い条件をみたす上半連続な集合値関数に対しては, Baire class 1 な選択関数の存在が保証される. ここで空間 X から距離化可能空間 Y への写像 $f : X \to Y$ が **Baire class 1** であるとは, X から Y への連続関数から成る列 $\{f_n\}$ が存在し, 各点 $x \in X$ に対して $f_n(x) \to f(x)$ が成り立つことである. 次の定理は, 本質的に Hansell, Jayne and Talagrand [6] によって与えられた (cf. [7, Theorem 3.1, 3.4 Remark]).

[8] 例えば, $\Phi : [0,1] \to 2^{[0,1]}$ を $0 \le x < 1/2$ のとき $\Phi(x) = \{0\}$, $x = 1/2$ のとき $\Phi(x) = [0,1]$, $1/2 < x \le 1$ のとき $\Phi(x) = \{1\}$ で定めると, Φ は上半連続なコンパクト凸値関数であるが, Φ の任意の選択関数は, $x = 1/2$ で不連続である.

定理 12 (Hansell, Jayne and Talagrand [6]). Z を距離化可能空間, Y をノルム空間 $\psi : Z \to \mathscr{C}(Y)$ を上半連続な集合値関数とする. このとき ψ の Baire class 1 な選択関数が存在する.

定理 12 と定理 3, 定理 6, 定理 9 を合わせることにより, 次が得られる.

命題 13. (1) X を可算パラコンパクトな族正規空間, Y をノルム空間, $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ を強上半連続な集合値関数とする. このとき, Ψ の Baire class 1 な選択関数が存在する.

(2) X を可算パラコンパクトな族正規空間, Y を Banach 空間とし, $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ は上半連続な集合値関数で $\mathsf{Graph}(\Psi)$ が $X \times Y$ のゼロ集合であるとする. このとき, Ψ の Baire class 1 な選択関数が存在する.

(3) X を空間, Y をノルム空間, $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ を上半 δ-連続な集合値関数とする. このとき, Ψ の Baire class 1 な選択関数が存在する.

REFERENCES

[1] R. H. Bing, *Metrization of topological spaces*, Canad. J. Math. **3** (1951), 175–186.

[2] M. Choban and S. Nedev, *Factorization theorems for set-valued mappings, set-valued selections and topological dimension*, Math. Balkanica **4** (1974), 457–460, (in Russian).

[3] R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[4] V. Gutev, *Factorizations of set-valued mappings with separable range*, Comment. Math. Univ. Carolinae **37** (1996), 809–814.

[5] V. Gutev, H. Ohta and K. Yamazaki, *Extensions by means of expansions and selections*, Set-Valued Analysis **11** (2006), 69–104.

[6] R. W. Hansell, J. E. Jayne and M. Talagrand, *First class selectors for weakly upper semicontinuous multivalued maps in Banach spaces*, J. Reine Angew. Math. **361** (1985), 201–220.

[7] J. E. Jayne and C. A. Rogers, *Selectors*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2002.

[8] S. Mardešić, *On covering dimension and inverse limits of compact spaces*, Illinois J. Math. **4** (1960), 278–291.

[9] E. Michael, *Continuous selections* I, Ann. of Math. **63** (1956), 361–382.

[10] E. Michael, *The product of a normal space and a metric space need not be normal*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 375–376.

[11] S. Nedev, *Selection and factorization theorems for set-valued mappings*, Serdica **6** (1980), 291–317.

[12] B A Pasynkov, *Factorization theorems in dimension theory*, Russian Math. Surv. **36** (1981), 175–209.